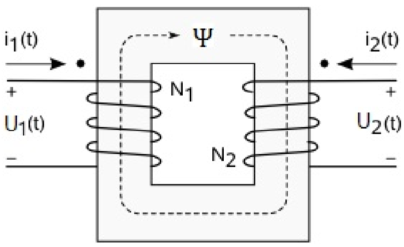
Claudinei Caetano Junior nºUSP:9065920
Marlon dos Santos Melhado nºUSP: 7563940
FCM0114 - Eletromagnetismo 1
ProfºDr. Philippe W. Courteille

Exercício 4 - Transformador

Enunciado: Considere duas bobinas similares com número de espiras N1 e N2 conectadas por um jugo de ferro. Na primeira bobina aplicamos uma tensão variando com o tempo U_1. Portanto, nesta bobina (chamada de primaria) corre uma corrente I_1, produzindo um fluxo magnético ψ, que seja integralmente transmitido através do jugo de ferro para a segunda bobina (segundaria). Aqui, uma tensão U_2 é induzida.

a. Calcule a razão U_2/U_1 em função do número de espiras. Qual é o comportamento da fase entre U_1 e U_2.
b. Quais são as fases das correntes I_1 e I_2 percorrendo as bobinas em relação às fases das tensões? Qual é a consequência para a potência média nas bobinas?

Resolução:



Esquema de um transformador

a. Uma diferença de potencial U_1 sobre o primário será responsável por gerar o fluxo magnético inicial que percorrerá as bobinas e a estrutura de ferro do transformador. A corrente I_1 que transita o primário será responsável por gerar o campo magnético inicial que induzirá uma corrente elétrica I_2 no secundário. No estado estacionário, poderemos decrever o fluxo magnético no primário e no secundário através das equações (1) e (2):

$$\psi_1 = N1\psi = I_1 L_1 + I_2 M, \tag{1}$$

$$\psi_2 = N2\psi = I_2 L_2 + I_1 M, \tag{2}$$

em que L_1, L_2 e M são respectivamente a indutância do primário, indutância do secundário e a auto-indutância do transformador, que permite o acoplamento magnético. Da lei de Faraday sabemos que uma variação temporal de fluxo magnético gera uma força eletromotriz ϵ, porém, o recíproco também ocorre. Sendo assim, segue que:

$$U_1 = -\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}[N1\psi] = -N1\frac{d\psi}{dt}, \tag{3}$$

$$U_2 = -\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}[N2\psi] = -N2\frac{d\psi}{dt}. \tag{4}$$

Tomando a razão entre (3) e (4), temos finalmente:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N1}{N2}. \tag{5}$$

Para examinarmos a fase entre as diferenças de potencial U_1 e U_2, vamos assumir que a diferença de potencial no primário é descrita por:

$$U_1(t) = U_0 cos(\omega t). \tag{6}$$

Assim, faremos sua inserção em (5) de modo a obter o resultado:

$$U_2(t) = U_0 \frac{N2}{N1} cos(\omega t), \tag{7}$$

que nos permite concluir a inexistência de fase entre as diferenças de potencial no primário e secundário. Para prosseguirmos com a resolução do exercício será necessário determinarmos a auto-indutância M do transformador. Podemos conhecê-la a partir das condições em que as correntes I_1 e I_2 anulam-se, desde que não simultâneamente. Dividindo (1) por N1 e (2) por N2, poderemos igualar as expressões a fim de obter:

$$I_1(\frac{L_1}{N1} - \frac{M}{N2}) = I_2(\frac{L_2}{N2} - \frac{M}{N1}) \tag{8}$$

Como expresso acima, no momento em que uma corrente é nula a outra não o é. Sendo assim, temos que:

$$\frac{L_1}{N1} = \frac{M}{N2}, e \tag{9}$$

$$\frac{L_2}{N2} = \frac{M}{N1}. \tag{10}$$

Tomando a razão entre (9) e (10), determinamos a auto-indutância do transformador dada por:

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \tag{11}$$

b. Ao acoplarmos um resistor R no secundário, poderemos determinar a corrente I_2 que o percorrerá. Utilizando a segunda lei de Kirchoff (expressão (13)), ela nos diz que a soma das quedas de tensões sobre uma malha fechada dever ser zero, assim:

$$U_1 = U_0 cos(\omega t) = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}, e \tag{12}$$

$$-U_2 = -I_2 R = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}. \tag{13}$$

Multiplicando (12) por L_2:

$$L_2 U_0 cos(\omega t) = M^2 \frac{dI_1}{dt} + M L_2 \frac{dI_2}{dt}, \tag{14}$$

e manipulando (13):

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} = -I_2 R - M \frac{dI_1}{dt}. \tag{15}$$

Inserindo (15) em (14), teremos:

$$L_2U_0cos(\omega t) = M^2\frac{dI_1}{dt} + M(-I_2R - M\frac{dI_1}{dt}), \tag{16}$$

que finalmente nos fornecerá:

$$I_2(t) = -\frac{L_2}{MR}U_0cos(\omega t) = -\frac{N2}{N1}\frac{U_0}{R}cos(\omega t). \tag{17}$$

Portanto:

$$I_2(t) = \frac{N2}{N1}U_0cos(\omega t + \pi). \tag{18}$$

Derivando (17) com relação ao tempo e inserindo em (14):

$$\frac{dI_1}{dt} = U_0\frac{L_2}{M}cos(\omega t) - \frac{L_2}{M}\omega\frac{N2}{N1}\frac{U_0}{R}sen(\omega t) \tag{19}$$

Inserindo (10) e multiplicando dt, calcularemos a integral em (19) que resulta em:

$$I_1(t) = \frac{U_0}{R}\frac{N2}{N1}\left[\frac{Rsen(\omega t)}{M\omega} + \frac{N2}{N1}cos(\omega t)\right] \tag{20}$$

Fazendo as substituições:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{21}$$

$$A = Csen(\phi) \tag{22}$$

$$B = Ccos(\phi) \tag{23}$$

$$A = \frac{R}{\omega M} \tag{24}$$

$$B = \frac{N2}{N1} \tag{25}$$

Assim, chegamos aos resultado da corrente I_1 no primário:

$$I_1(t) = \frac{U_0}{R}\frac{N2}{N1}\sqrt{(\frac{N2}{N1})^2 + (\frac{R}{\omega M})^2}cos(\omega t + \phi_1), \tag{26}$$

em que a fase ϕ_1 é dada por:

$$\phi_1 = arctan[\frac{N1}{N2}\frac{R}{\omega M}] \tag{27}$$

Nos atendo as diferenças de potencial U_1 e U_2 que não possuem fase entre si, e a corrente I_2, observamos que a fase que existe entre os sinais das diferenças de potencial no primário e secundário, e a corrente no secundárioé de $\phi_2 = \pi$, que quer dizer que enquanto temos um valor máximo em U_1 e U_2 teremos um valor mínimo em I_2. Entretanto, entre as diferenças de potencial U_1 e U_2, e corrente I_1 temos que a fase entre estas grandezas é dada por (27).

Já a potência média pode ser calculada atavés de:

$$< P_1 >=< U_1 I_1 >= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} U_1(t) I_1(t)\, dt, e \tag{28}$$

$$< P_2 >=< R {I_2}^2 >= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} R I_2(t)^2\, dt, e \tag{29}$$

em que, o valor da grandeza T e t_0 poderão ser substituídas por $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e $t_0 = 0$, desta forma utilizaremos as expressões (6) e (20) para efetuar o cálculo. Então, com:

$$P_1 = U_1 I_1 = \frac{{U_0}^2}{R} \frac{N2}{N1} \left[\frac{1}{M\omega} cos(\omega t) sen(\omega t) + \frac{N2}{RN1} cos^2(\omega t) \right], e \tag{30}$$

$$P_2 = R {I_2}^2 = \frac{{U_0}^2}{R} \left(\frac{N2}{N1} \right)^2 cos^2(\omega t), \tag{31}$$

poderemos substitui-las em (28) para então determinarmos as potências médias, que serão:

$$< P_1 >= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} {U_0}^2 \frac{N2}{N1} \left[\frac{1}{\omega M} cos(\omega t) sen(\omega t) + \frac{N2}{RN1} cos^2(\omega t) \right] dt = \frac{1}{2} \frac{{U_0}^2}{R} \left(\frac{N2}{N1} \right)^2, e \tag{32}$$

$$< P_2 >= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{{U_0}^2}{R} \left(\frac{N2}{N1} \right)^2 sen^2(\omega t)\, dt = \frac{1}{2} \frac{{U_0}^2}{R} \left(\frac{N2}{N1} \right)^2. \tag{33}$$

Assim, temos que na média a energia do sistema é conservada, isto é, toda a potência gerada no primário é transmitida ao secundário, portanto:

$$< P_1 >=< P_2 > . \tag{34}$$